数理解析研究所講究録
第 1583 巻 2008 年 205-219

Fourier 自身にとり Fourier 係数とは何だったのか？

吉川　敦
yoshikaw@math.kyushu-u.ac.jp

1　はじめに

数理解析研究所講究録 1546 号「数学史の研究」に，昨夏の高瀬正仁氏の講演の稿 [15] が載っている．高瀬氏の引用箇所について，Joseph Fourier の *Théorie analytique de la chaleur*（1822）をざっと見，拙見を申上げたところ，恐縮なことに，夏の研究集会で報告してみるようお誘いをうけた．

「後知恵」ながら Fourier の大著の一部[1]を眺めさせていただきたい[2]．

著者 Fourier は，1768 年 3 月 21 日出生，1830 年 5 月 16 日死亡，波乱に満ちた 62 年余りの生涯を過ごした．早くから数学者として頭角を現していたが，国民議会による信仰誓約の停止の決定を機に僧職への選択を捨て，大革命の渦中に身を投じた．軍人でもあり，周到な考古学者・博物学者でもあり，また，有能な行政家でもあり，さらに，同時に，数学者・物理学者でもあった[3]．Kahane[4] は，

> Fourier is a pure product of the French Revolution. His life is a very interesting cross-section of French history in the years 1770 – 1830.

と言っている．Fourier はその典型であるが，こういう時代に生きた人たちは簡単には全体像を捉えさせてくれない．

---

[1] 大著 *Théorie analytique de la chaleur*（復刻 [4]．翻訳：西村真人氏・朝倉書店.）は，序文 22 ページ，本文 601 ページ，付図 20，正誤表付き，巻末目次（索引）36 ページから成る．

[2] Fourier の思想が今日の数理科学の文脈でどのように活かされているかを概観するには [12] の書物が楽しい．また，Peetre の Web 上の記事 [21] も見られたい．Fourier の議論を，歴史的文脈を配慮しつつ数学的に正当化することについては [8]（特に，第 2 章 The beginning of Fourier series）に詳しい．[8] に紹介されている [2] は往時の講義の速記録だそうで，面白そうだが，未見である．[8] を見たのは，Fourier 解析に関する（筆者固有のやや癖のある）教科書（[20]）を準備しているときでもあり，Fourier の仕事は，蒸気機関や産業革命に示唆されて熱機関が重要になったことが背後にあるのかとの問を Kahane 教授に発したことがある．答えは，否．それは Carnot の仕事で，Fourier の場合は，地球の熱収支への理解の獲得が動機だということだった．確かに，そのように [4] の序章に書いてある．

[3] Peetre([21]) は，

> Fourier wanted to become a priest but gradually the Devil, in the guise of Mathematics, took over and he was never ordained.

と言っている．なお，[7] や [8] に詳述されている．要領のよい紹介は [12] にもある．[5] は未見．

[4] [8], p.3. Chapter 1. Who was Fourier ? なお，Fourier の人となりを知るための資料としては，[8]，第 1 章末尾（p.7）に，Kahane が推薦する文献が挙げられている．

2 高瀬氏の論考から

高瀬氏は，[15] において **フーリエはどのような関数をフーリエ級数に展開したのであろうか** という設問の重要性を説明し，西村重人氏による [4] の翻訳からの引用をもとに，議論を展開している．高瀬氏の引用例のいくつかをもとに，Fourier の仕事を見て行きたい．

2.1 最初の引用例（第 186 項）．

まず，高瀬氏の引用例 1（第 186 項）を見てみよう．念のために，項冒頭の仏文を掲げる（斜体は筆者による）：

> Il s'agit maintenant de connaître les *limites* entres lesquelles est comprise l'intégrale $\frac{1}{2^3.m^3}\int(d(\sec.'')\cos.2mx)$ qui complète la suite.

ちなみに，この項の末尾の文章は，

> On parvient ainsi à l'équation
>
> $$2y = c - \frac{1}{2m}\sec.x\cos.2mx + \frac{1}{2^2m^2}\cdot\sec.'x\sin.2mx + \frac{1}{2^3m^3}\sec.''x\cos.2mx + \frac{K}{2^3m^3}(\sec.''x - \sec.''0),$$
>
> dans laquelle la quantité $\frac{K}{2^3.m^3}(\sec.''x - \sec.''0)$ exprime exactement la somme de tous les derniers termes de la série infinie.

となっている．実は，ここまで読んで，Fourier が誤差を論じようとしているような印象を筆者は受けたので，最初の方の引用で，積分範囲[5]よりも，むしろ，積分値の変動範囲であろうという意味で，わざわざ斜体 *limites* としたのである．実際，遡って眺めてみると，第三章第二節（第 171 項から第 178 項まで）および第三章第三節（第 179 項から第 189 項まで）において

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \frac{1}{9}\cos 9x - etc \qquad (1)$$

（ただし，$0 < x < \frac{1}{2}\pi$）やその積分などを Fourier は論じている．標記の引用箇所は，収束を示すために，三角級数の第 m 項までの打ち切り誤差の話が展開されているようにも思われる[6]．これらは，Fourier が三角級数を形式的な級数として把握しているわけではなく，何か確かな「数値曲線（関数）」を取り扱いやすい形に表すものと考えていることを示すもののようである．

[5] 積分範囲が重要ではないというのではない．積分区間はいくつかの標準的なものがあり，例えば，係数

$$\int_0^{\pi/2}\cos(2n-1)x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(2n-1)x\,dx = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

のような場合は，文脈上 Fourier にとって $x = 0$ から $x = \frac{\pi}{2}$ までの積分（あるいは，$x = -\frac{\pi}{2}$ から $x = \frac{\pi}{2}$ までの積分）は当然ではなかったのだろうか．

[6] 本質的に，後年の Fourier 級数の収束を示す議論と同様である．[8] でもそう指摘されており，後年 Dirichlet により整理されたものであると付言している（p.11）．ちなみに，(1) の収束の議論に関しては，第 177 項に，収束の定義が述べられ，かつ，値が $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ では

2.2 高瀬氏の第三章第六節の諸項の引用について

第三章第六節（第 207 項から第 235 項まで）は Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques（すなわち,「任意の関数の三角級数への展開」）と題され，ここで，Fourier は一般の関数の正弦あるいは余弦級数展開を論じている．高瀬氏は，引用例 2–7（第 219，220，229，234，235 項）をもとに，Fourier においては，曲線の形で表現されるある実体が「関数概念」に先行し，決して，その逆ではないことに注意を払っている．高瀬氏は「関数概念」という根源的な思想に関心を集中させ，Fourier による「関数概念」の把握が，Leibniz，Euler と続く自然な系譜に属しているというのである．

一方，筆者にとっては，これら注意に加えて，引用箇所に窺える Fourier による三角級数展開の実際の計算の試み，特に，係数の決定が印象的であった．

今日の後知恵的立場から見れば，区間 $-\pi < x < \pi$ 上の「関数」$\varphi(x)$ の Fourier 級数展開は

$$\varphi(x) = m + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2}$$

で与えられる．第 1 項 m は平均値

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx \tag{3}$$

であり，残りの係数は

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx\,dx \tag{4}$$

$(n = 1, 2, \cdots)$ である[7]．Fourier は，(4) および (3) を導いているが，その導出の手続きが極めて興味深い．今日ならば，三角関数の直交関係

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \sin mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \cos mx\,dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \cos mx\,dx = 0 \tag{6}$$

$-\frac{\pi}{4}$ となることが述べられている．収束の速さにも言及がある．Fuourier が，三角級数 (1) が不連続関数（$-\frac{\pi}{2} < x \leqq 0$ の部分を補って）

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\pi, & -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi \\ -\frac{1}{4}\pi, & \frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

に対応するものであることや，いわゆる Gibbs 現象にも気づいていたことを示唆しているようである．膨大な数値計算結果を利用していた可能性はあるのではないか．なお，高瀬氏は第 219 項の引用（[15]）に際して [même à celles qui seraient] discontinues [et entièrement arbitraires] への不審を述べているが，Fourier の意図は案外こんなことであったのかも知れない．

[7](4) の a_n を $n = 0$ の場合に形式的に拡張すれば，$m = \frac{1}{2}a_0$ である．(2) 右辺の三角級数が $\varphi(x)$ の平均値のまわりの振動部分に相当している．ただし，Fourier は $\varphi(x)$ を奇関数または偶関数の場合に限定した正弦級数展開あるいは余弦関数展開を扱っており，したがって，積分区間は $0 < x < \pi$ に帰し，$a_n \equiv 0$ または $b_n \equiv 0$ となる．

および

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0 \tag{7}$$

$(n, m = 1, 2, \cdots)$ を真っ先に利用する．直交関係のもとでは，展開 (2) が想定さえされれば，$\varphi(x)\ \sin nx$ あるいは $\varphi(x)\ \cos mx$ を積分すれば (4) などが従うことが直ちに了解できるのである．ところが，[4] をざっと眺めた限りでは，直交関係が何よりも強調されているという風には見えないのである．実際には，第 221 項及び第 224 項で Fourier は直交関係を論じており，上に述べた方法でも係数の決定を行っている．しかし，敢えて複雑に見える手法を Fourier が優先しているのには，何か係数公式を示すことだけに留まらない別の意図があったと考えるべきだろう．実際，高瀬氏の引用箇所から，Fourier は，積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\ \sin nx\, dx \quad \text{または} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\ \cos nx\, dx$$

などに単なる記号を割り当てているのではなく，これらが実際に計算できる量であることを示そうとし，かつ，併せて，その過程で未定係数法を援用し，最終的には (4) などの公式に辿り着いて見せているという風に筆者には思われる．この観察が本稿の標題の所以である．次節（§3）で若干詳しく説明したい．

2.3 高瀬氏の引用についての補遺．第 220 項をめぐって

[15], p.49 中央から後半の部分であるが，公式 (4) が得られた後に，その計算法あるいは意味を説明している箇所がある．定積分 $\int_0^{\pi} \varphi(x)\ \sin x\, dx$ の幾何学的意義ないし幾何学的計算法を Fourier は次のように説明する：

> $\cdots$ En effet, si la fonction φx est représentée par l'ordonneée variable d'une courbe quelconque dont l'abscisse s'étend depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, et si l'on construit sur cette même partie de l'axe la courbe trigonométrique connue, dont l'ordonnée est $y = \sin. x$; il sera facile de se représenter la valeur d'un terme intégral. Il faut concevoir que pour chaque abscisse x, à laquelle répond une valeur de φx, et une valeur de $\sin. x$, on multiplie cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi x.\sin. x$. On formera, par cette opération continuelle, une troisième courbe, dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduite proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente φx. Cela posé, *l'aire de la courbe réduite étant prise depuis* $x = 0$ *jusqu'à* $x = \pi$, *donnera la valeur exacte du coëfficient de* $\sin. x$; et quelle que puisse être la courbe donnée

qui répond à φx, soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique; en sorte que *l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas possibles, une valeur déterminée qui donne celle du coëfficient de* sin. x *dans le developpement de la fonction.* ⋯

斜体は筆者に拠る．[15], p.49 の太字部分の前後である．これらは，関数の定積分の値が関数の定義区間と関数のグラフ（曲線）の間の部分の面積であるということを述べており，Fourier 係数 (4) を直感的な側面から説明しようとしているように見える．しかし，筆者は，後年の Kelvin 卿の積分器の発想に繋がるのではないかという印象を受けた．これについては，§4 で節を改めて説明したい．

3 Fourier 係数の実体的理解

§2.2 で Fourier による正弦係数や余弦係数 (4) の導出が印象的であったと述べた．少しばかり論じてみたい[8]．

3.1 奇関数の正弦級数展開 — Fourier の導出

第 207 項 ([4]) で，Fourier は，(区間 $-\frac{1}{2}\pi < x < +\frac{1}{2}\pi$ において) 奇関数[9] $\varphi(x)$ を正弦級数

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \tag{8}$$

に展開し，その係数を決定するという問題を提起している．長い議論の結果，第 219 項末尾の (D) 式で

$$\frac{1}{2}\pi\,\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} \varphi(x)\,\sin nx\,dx\right) \sin nx \tag{9}$$

が示される．したがって，

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\,\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{10}$$

が得られているが，最初の導出は直交関係を用いてはいない．直交関係は，§2.2 で注意したように，むしろ (10) の成立を検証する過程で利用されているようである．本節（や後述の §4 も関連するが）で見るように，Fourier の

[8]なお，Peetre ([21]) はより踏み込んでおり，さらに詳しい．

[9]以下，[4] の記法を離れて当世風にする．また，定数類も添え数を多用し，Fourier の記法から離れる．ただし，演算の形式性は Fourier に従うことにする．

時代の人たちは，(10) 右辺の積分に内容，つまり，記号以上のものを読み取るために最小限の儀式とでもいうべきものを要していたようである．高瀬氏のご指摘の「関数概念」は,「関数演算」の解釈にも及んでいるというべきであろう．

さて，Fourier は，奇関数 $\varphi(x)$ を奇数べきの級数

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}A_k\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},\quad A_k=(-1)^{k-1}\frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}}\varphi(0),\tag{11}$$

に展開する．今日の我々ならば，収束を論じたくなり[10]，例えば，一様収束の場合なら，区間 $-\pi<x<+\pi$ が収束域にあることを，議論が限定されることを承知で要請したくなるが，Fourier は，少なくともこの段階で，(11) の収束性には言及していない．

次に，展開

$$\sin nx=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}n^{2k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

を代入して，(8) を

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{2k-1}a_n\right\}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\tag{12}$$

と書き換える．課題は，a_n の決定であった．そこで，Fourier は，(11) と比較して得られる方程式系

$$A_k=\sum_{n=1}^{\infty}n^{2k-1}a_n,\quad k=1,2,\cdots\tag{13}$$

を利用しようというのである．

未知数 a_n は無限個ある．そこで，Fourier は，さらに，補助的な未知数 $a_{n,m}$, $n=1,2,\cdots;\ m=n,n+1,\cdots$ 及び $A_{k,\ell}$, $k=1,2,\cdots;\ \ell=1,k+1,\cdots$ を導入して，(13) を

$$\sum_{n=1}^{m}n^{2k-1}a_{n,m}=A_{k,m},\quad k=1,\cdots,m;\quad m=1,2,\cdots\tag{14}$$

で「近似」する．ここで,「近似」と書いたが，Fourier は

$$a_n=\lim_{m\to\infty}a_{n,m},\quad A_n=\lim_{m\to\infty}A_{n,m}\tag{15}$$

を意識していたことは以下の計算の遂行で明らかであろう．

(14) を解くために，Fourier は (14) の $m+1$ の場合を変形し，k について隣接する方程式系から $a_{m+1,m+1}$ を逐次消去して

$$\sum_{n=1}^{m}n^{2k-1}\left\{(m+1)^2-n^2\right\}a_{n,m+1}=(m+1)^2A_{k,m+1}-A_{k+1,m+1}$$

[10] この点について後に拙見を付言する（§3.3）

を導く（$k=1,\cdots,m$）．(14) と比較して，漸化式

$$A_{k,m}=(m+1)^2A_{k,m+1}-A_{k+1,m+1},\quad k=1,\cdots,m \tag{16}$$

及び

$$a_{n,m}=\{(m+1)^2-n^2\}a_{n,m+1} \tag{17}$$

が得られる（$n=1,\cdots,m$ または $m=n,n+1,\cdots$）．そこで，(15) と (17) に拠って

$$a_n=a_{n,n}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^2-n^2},\quad n=1,2,\cdots \tag{18}$$

となる．引き続き，(16) から，

$$A_{k,k}=\left(\prod_{j=1}^{m}(k+j)^2\right)A_{k,k+m}-\sum_{\ell=1}^{m}\left(\prod_{j=1}^{\ell-1}(k+j)^2\right)A_{k+1,k+\ell}$$

以下，

$$\begin{aligned}&=\left(\prod_{j=1}^{m}(k+j)^2\right)A_{k,k+m}-\left(\sum_{\ell=1}^{m}\prod_{j=1}^{\ell-1}(k+j)^2\prod_{i=\ell+1}^{m}(k+i)^2\right)A_{k+1,k+m}\\&\quad+\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{i=\ell+1}^{m}\left(\prod_{j=1}^{\ell-1}(k+j)^2\prod_{h=\ell+1}^{i-1}(k+h)^2\right)A_{k+2,k+i}\\&=\cdots\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$P_{j,k;m}=\sum_{1\leqq\ell_1<\cdots<\ell_{j-1}\leqq m}\frac{1}{(k+\ell_1)^2\cdots(k+\ell_{j-1})^2}$$

とおく．$P_{1,k;m}\equiv 1=P_{1,1}$ である．$j>1$ のときも

$$\lim_{m\to\infty}P_{j,k;m}=P_{j,k}=\sum_{1\leqq\ell_1<\cdots<\ell_{j-1}<\infty}\frac{1}{(k+\ell_1)^2\cdots(k+\ell_{j-1})^2} \tag{19}$$

は確定する．また，上の式から

$$\frac{1}{(k+1)^2\cdots(k+m)^2}A_{k,k}=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}P_{j,k;m}A_{k+j-1,k+m} \tag{20}$$

が従うことがわかる．

Fourier は，まず，$k=1$ の場合を考察する．(14) より，$A_{1,1}=a_{1,1}$ であり，他方，(18) を考慮し，(20) において $k=1$ かつ（形式的に）$m\to\infty$ として，

$$a_1\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}a_1=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}P_{j,1}A_j \tag{21}$$

を導いている.

Fourier は，再度 (14) に戻って，引き続き，$a_2, a_3, \cdots$ が満たすべき関係式の導出を図っている．ここでは，これらについては省略し[11]，Fourier による $P_{j,1}$ の決定を見ておこう．Fourier は

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

に注意した上で,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n-1)!} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

の右辺を展開して得られる等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum_{\ell_1<\cdots<\ell_{n-1}}\frac{1}{\ell_1^2\cdot\cdots\cdot\ell_{n-1}^2}\right)\frac{x^{2(n-1)}}{\pi^{2(n-1)}}$$

を利用して,

$$\frac{\pi^{2(n-1)}}{(2n-1)!} = \sum_{\ell_1<\cdots<\ell_{n-1}}\frac{1}{\ell_1^2\cdot\cdots\cdot\ell_{n-1}^2} = P_n, \quad n=2,3,\cdots \tag{22}$$

を導いている．(19) を参照すると,

$$P_{2,1}+1=P_2, \quad P_{3,1}+P_{2,1}=P_3\cdots \quad P_{k+1,1}+P_{k,1}=P_{k+1},\cdots$$

となるから,

$$P_{n,1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{\pi^{2(k-1)}}{(2k-1)!}, \quad n=2,3,\cdots \tag{23}$$

が導かれる．$P_{1,1}=1$ を補えば，(23) は $n=1,2,\cdots$ に対して成立する．かくて，(21) は (11) を思い起こして

$$\frac{1}{2}a_1 = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k}\frac{\pi^{2(k-1)}}{(2k-1)!}\right)\varphi^{(2j-1)}(0) \tag{24}$$

となる．これは [4] の 225 ページ冒頭にある等式に相当する．

3.2 Fourier 係数の決定

さて,

$$\frac{1}{(2j-1)!}\int_0^{\pi} x^{2j-1}\sin x\,dx = \sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k}\frac{\pi^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad j=1,2,\cdots \tag{25}$$

[11] ただし，これらの導出も自明ではない.

だから，(24) の右辺は

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\,\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\sum_{j=1}^\infty \int_0^\pi \frac{x^{2j-1}}{(2j-1)!}\,\sin x\,dx\right)\varphi^{(2j-1)}(0)$$

に相当する．かくて，(10)（の少なくとも $n=1$ の場合）は得られたことになる．Fourier も当然承知していたことであろうが，[4] ではこのような議論を行ってはいない．

詳細は省略するが，Fourier は，$n \geqq 2$ に対し，

$$\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\,na_n = \sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^j (-1)^{j-k}\frac{1}{n^{2(j-k)}}\frac{\pi^{2(k-1)}}{(2k-1)!}\right)\varphi^{(2j-1)}(0) \qquad (26)$$

を示している．さらに，(24) と併せて (8) に代入し，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\varphi(x)\\ &=\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\left\{\sum_{j=1}^\infty\left(\sum_{k=1}^j \frac{(-1)^{j-k}}{n^{2(j-k)}}\frac{\pi^{2(k-1)}}{(2k-1)!}\right)\varphi^{(2j-1)}(0)\right\}\\ &=\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\left\{\sum_{\ell=0}^\infty \frac{(-1)^\ell}{n^{2\ell}}\sum_{k=1}^\infty \frac{\pi^{2(k-1)}}{(2k-1)!}\varphi^{(2\ell+2k-1)}(0)\right\}\end{aligned}$$

を導く．$\varphi^{(2\ell)}(x)$ も奇関数だから，べき級数に展開すると，$x=\pi$ では

$$\varphi^{(2\ell)}(\pi) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\pi^{2k-1}}{(2k-1)!}\varphi^{(2\ell+2k-1)}(0)$$

となるはずであるから，

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\left\{\sum_{\ell=0}^\infty \frac{(-1)^\ell}{n^{2\ell}}\varphi^{(2\ell)}(\pi)\right\} \qquad (27)$$

が導かれる．ところで，

$$s_n(x) = \sum_{\ell=0}^\infty \frac{(-1)^\ell}{n^{2\ell}}\varphi^{(2\ell)}(x)$$

は，奇関数であり，さらに，微分方程式

$$\frac{1}{n^2}\frac{d^2}{dx^2}s_n(x) + s_n(x) = \varphi(x)$$

を満たす．したがって，

$$\begin{aligned}&s_n(x) = \mathrm{const.}\ \sin nx\\ &\qquad + n\left(\int_0^x \varphi(t)\,\cos nt\,dt\right)\sin nx - n\left(\int_0^x \varphi(t)\,\sin nt\,dt\right)\cos nx\end{aligned}$$

となるべきであり，特に，

$$s_n(\pi) = n\int_0^\pi \varphi(x)\,\sin nx\,dx$$

が得られる．以上が，Fourier による (9) の導出である．

3.3 それにしても，なぜ？

上述の Fourier の導出法については，Kahane も 定数 1 の展開について，a rather bizarre series of computations と言ったあとで，特に，上で紹介した部分については，

> He begins in the same fantastic way as in expressing the constant 1 as a cosine series.

と言っている（[8], p.11）．Kahane は，Fourier が Daniel Bernouilli の議論を補った後，さらに，(第 230 項，[4], p.249)

> La solution donnée par ce géomètre suppose qu'une fonction quelconque peut toujours être développée en séries de sinus ou de cosinus d'arc multiples. Or de toutes les preuves de cette proposition *la plus complète* est celle qui consiste à résoudre en effet une fonction donnée en une telle série dont on *détermine* les coëfficients.

と述べている[12]点については a very disputable statement とコメントし，疑義を呈している（[8], p.12）．

Fourier が係数の「決定」ということに細心の注意を払ったことは，その係数の導出法が，極めて巧みであり，ひたすら感服するしかないほどであるということからも納得が行く．しかし，その難は，形式的な議論の可否が問題になるということではなく，むしろ係数の具体的な決定ということの意味が論議を要するということであろう．

Fourier は，任意の関数の三角級数展開がもとの関数を再現することには疑念は全く抱いていなかったのであろう．したがって，今日的な観点での数学的証明は真意では関心外のことであって，級数の具体的な決定，特に，曲がりなりにも計算手続きを与えることの方が重要であったのであろう．こういうことが上で引用した Fourier の見解の背景なのであろう．これは 19 世紀を通じての数学的論考の一般的な姿勢でもあったようである．

しかし，Fourier の立場そのものには，彼の後に実際に Fourier 級数をめぐって惹起されたさまざまな議論に繋がるような発展性や洞察性が乏しかったのかも知れないという気もする．

注意 3.1 脚注 10 に関連して拙見を付加する．与えられた関数 $\varphi(x)$ が解析的であっても，その Taylor 展開が関数を再現するためには収束域が問題になり，一般には，$\varphi(x)$ とその Taylor 多項式のグラフが，考察対象の区間全体で近いということはない．つまり，べき級数展開は局所的である．この事実は当然 Fourier は承知していたはずである．これに対し，なめらかな $\varphi(x)$ の三角級数展開は大域的で，考察対象の区間全体で，$\varphi(x)$ のよい近似を与え

[12]斜体は筆者による．

るが，これも Fourier は知っていたであろう（既述のように，不連続点ではGibbs 現象の問題があることにも Fourier は，無知ではなかったようではある）．さらに，三角級数展開には固有関数展開としての熱方程式の構造に密着した長所があり，実際，Fourier はそれを利用し尽くしている．それにもかかわらず，Fourier が，べき級数展開と三角級数展開という全く性格の異なるものを結びつけて，このような不思議な手法で Fourier 係数を導出してみせたということはどういうことなのだろう．ここには，納得をする，了解を得るという営為が関わっていると思われる．この時代の思考習慣に通じているわけでもない筆者にはよくわからない[13].

4　Kelvin 卿の積分器

§2.2 の記述に Kelvin 卿の積分器のヒントになったのではないかと思われる点があると述べた．積分器の説明をしておこう．

4.1　Kelvin 卿と Fourier 級数

Kelvin 卿 William Thomson は，Fourier の仕事に早くから注目し，イギリスに紹介し，かつ，発展させた人であった．特に，気象観測や潮汐観測などのデータの処理を Fourier 級数を用いて行ったらしい．実際の計算作業に関しては熟練した計算技術者を必要としていたようである．[17] の冒頭でも次のように述べている[14].

> 関数を Fourier の方法に従って単純調和成分に分けて解析するために要する計算は算術的な重労働である．最近 Bristol であった大英連盟の集会の結果，わたくしは，このような計算を楽にこなすはずの器械を見出す努力を再開した．以前何年にもわたって，このような目的は何らかの単純な機械的手段で達成されるはずだとは思っていたのだが，実際に有用な結果を約束することができそうな十分に簡明な器械の工夫に成功したのは漸く最近になってであった．この段階に至ってから，数日前に，兄の James Thomson 教授に考案した器械について説明したところ，兄からは，何年も昔に思いついたが未発表のままという，ある種の積分器の説明があった．わたくしの特別な目的を達するためには兄の器械の方が今までわたくしが思いつくことができたものに比べて遥かに簡単なものであることがたちどころにわかった．兄の積分器についての論説は王立協会に本信とともに報告されている．

[13] 時代は下がるが，[6] の解説に若干の示唆がある．なお，Peetre([21]) は，このようなロマンティックな感慨に耽らず，Fourier の議論が有効な $\varphi(x)$ のクラスの決定を行っている．

[14] 本来は英文を引くべきであるが，手抜きで，PC 内の拙訳を挙げる．以下の引用も同様．

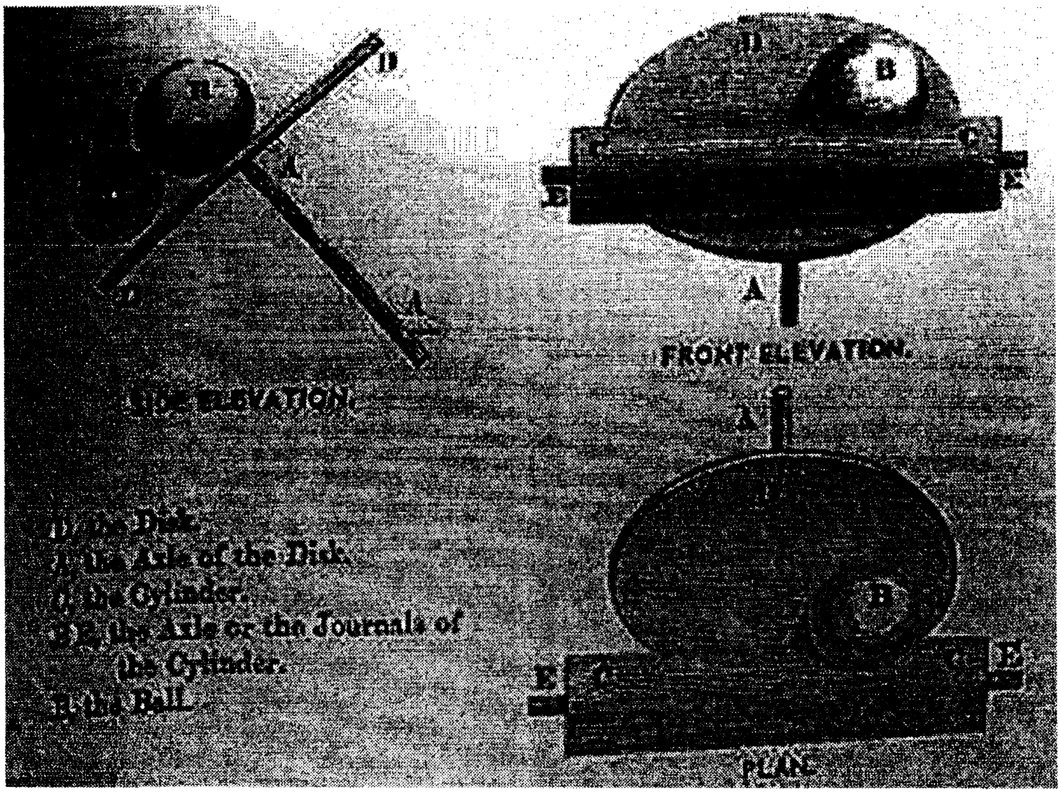

図 1: D, the Disk. A, the Axle of the Disk. C, the Cylinder. EE, the Axle or the Journals of the Cylinder. B, the Ball.

James Thomson の積分器については，[16] に詳しい．19 世紀中葉には Green の定理を応用した面積器がいくつも提案されており，Amsler の Planimeter は今でも使用されている（例えば，[22] を参照されたい）．James Thomson のものは，J. Clerk Maxwell の面積器を改良したものだという．図 1 は，[16] 所収の積分器の図である．模型は王立協会に提出してあると述べてあるから，今でも現物が見られるかも知れない．

James の積分器は，45° の傾けられた周回する円板，輪転軸が円板面と平行に固定された自由に輪転する（断面の半径 r の）円筒及び円板と円筒の両方に接する（半径 ρ の）回転する球とから成り，さらに，円板には周回軸が取り付けられている[15]．円板を傾けてあるのは重力を利用するためである．球の位置は小さな支持板，あるいは球を挟み込む枠の付いた円筒の軸と平行な棒を動かして制御する．球が円筒に接しながら円板面を動くとき，円板との接点の軌跡は，円板の中心を通る直線上にあるものとし，特に，このとき，球の中心の軌跡は円筒の輪転軸と平行である．James は，このときの球の中心の動きを経線方向と言っている．

[15]ここで，原著論文の語法を尊重して，以下，我々の日常語では，すべて「回転する」というのを使い分けて，耳慣れない用語かも知れないが，円板は周回し，円筒は輪転し，球は回転する，と言うことにする．

円板の周回が摩擦によって球の回転を引き起こし，球の回転は摩擦によって円筒を輪転させ，円筒の輪転を目盛で読み取るというのが James による積分計算の工夫である．すなわち，円板の回転角が初期位置（基準線）から x（ラジアン）のとき，球の中心が基準位置（原点）から経線方向に y の位置にあるように設定して，円板を（例えば）1 周回させたときの円筒の輪転軸の全輪転量が $\int y\,dx$ （の定数倍）を与える．実際，周回角 x，経線位置 y のときの円筒の輪転量に対し，周回角 $x+dx$，経線位置 $y+dy$ となったときに新たに加わる輪転量 $d\gamma$ は $d\gamma = y\,dx$ である[16]．すなわち，円板の周回 dx によって球は円板の中心と球と円板の接点を結ぶ半径に垂直方向に $\sqrt{\rho^2+y^2}\,dx$ の回転を受けるが，その経線方向と垂直な成分は $\sqrt{\rho^2+y^2}\cos x\,dx = y\,dx$ であり，これが円筒の輪転量の追加になるわけである．したがって，円板を 1 周回させれば，輪転量は

$$\int d\gamma = \int_0^{2\pi} y\,dx$$

となる．

Willam は [17] において，さらなる積分器の機能の拡張を提案している[17]．

> $\int \varphi(x)\psi(x)\,dx$ を計算するためには，周回円板が 0 あるいは初期の位置から $\int_0^x \varphi(x)dx$ に等しい角に置かれ，他方，回転する球は，常に，その 0 位置から $\psi(x)$ の位置にあるように動かされる．このようにすると，円筒が，明らかに $\int_0^x \varphi(x)\psi(x)dx$ に等しい角だけ回って，かくて，問題を解決する．

§2.3 で紹介した Fourier が述べていることに非常に近くはないだろうか．

---

[16] 球が円板の周回に引き起こされる回転面は円筒の輪転軸に対し dx だけ傾いているが，$\cos(dx) \sim 1$, $\sin(dx) \sim dx$ である．

[17] この手続きの実現法は

> 必要な運動を周回する円板と回転する球に与えるためには，次のような方法がある：—
>
> 2 枚の紙に曲線
>
> $$y = \int_0^x \varphi(x)\,dx, \quad \text{および} \quad y = \psi(x)$$
>
> を描き，これらの紙を 2 個の円筒の円筒面，または，1 個の円筒の円筒面の異なる場所に，x 軸が円筒の軸に垂直になるように，貼付する．2 個の円筒は（円筒が 2 個の場合）円筒面が同じ速度で動くように連結する．器構には装着させるものとして，各円筒の円筒面の十分近くに滑針，あるいは，誘導棒を付け，操作員は手動によって，円筒の回転中，常に可動端子が円筒面上の曲線に接触するよう誘導する．
>
> 操作員は 2 名必要であろう．1 名では，回転がよほど緩慢でもない限り，同時に 2 個の可動端子を条件を満たすように動かすことはできないであろう．可動端子の一方は固有の機構によって周回する円板の角運動を端子に線形運動として変換し，もう一方の端子には回転球の中心の運動を線形運動として変換する．

としている．

4.2 アナログ計算機

Kelvin 卿は，任意階数の常微分方程式の機械的な解法のために，複数の積分器を連結させた機構を提案している（[18, 19]）．しかし，積分器間で（回転）情報の伝達が当時の技術水準では保障できず，半世紀後の C.W.Niemann によるトルク増幅器の開発を待って，V. Bush の微分解析機として卿のアイデアはようやく実現された．Bush の解説（[1]）は詳細を極めており，（機械式，電気式の）微分解析機が世界中で制作された．Von Neumann らのプログラム内蔵式の計数型計算機の成長普及とともに微分解析機は過去の遺物になってしまった[18]．東京理科大学近代科学資料館には機械式のものが一機[19]展示されている（[9]).

ちなみに，実変数関数について，微分解析機により生成されるということと多項式係数の常微分方程式の解として得られるということの同値性の証明が Shannon の修士論文であり，最初の仕事であった（[13]). この結果は，後年，汎用計測型計算機によって生成される（計測型計算可能性）ということと代数微分方程式の解として得られるということの同値性の証明として Pour-El によって改めて論じられた（[11]）．計測型計算可能性が Turing 機による計算可能性，つまり，計数型計算可能性は異なる概念であることが，例えば，ガンマ関数は前者ではないが後者ではあるという意味で明らかになった[20].

高瀬氏の論考 [15] の主題「関数概念」との関連では，ただし，**数学解析的な意味での関数概念というわけではなく，計算可能という立場での関数概念ではあるが，計数型なら「対応」に近く，計測型なら「曲線」に近い**と言えるであろう．ただし，計測型の計算可能性については，計数型の場合の Church-Turing の提唱に相当するものが確立しておらず，厳格なことは言えない．

謝辞 筆者の議論は高瀬正仁准教授の炯眼 [15] に相当に依存した．小松彦三郎教授からは Peetre([21]) をご教示いただいた．ご両所に深甚の謝意を呈する．

参考文献

[1] V. Bush. The differential analyzer. A new machine for solving differntial equations, Journal of the Franklin Institute, **212** (1931), pp. 447–488.

[2] J. Dhombres (ed.). *L'Ecole normale de l'an III. Leçons de mathématiques de Laplace, Lagranges, Monge*. Dunod. 1992.

[3] Jean Dhombres & Jean-Bernard Robert. *Fourier. Créateur de la physique-mathématique.* Belin. 1998.

[18] ホビーとしては，今日も人気があるようである．[23] 参照．

[19] 清水辰次郎研究室の旧蔵であるという．清水先生と微分解析機の関わりについて調査が必要だと思われるが，追悼記事 [14] には言及がなく，[14] を書かれた杉山博教授も亡くなっている．

[20] Hölder の定理：「ガンマ関数は多項式係数の代数微分方程式の解にはならない．あるいは，ガンマ関数及びその累次導関数は有理関数体上代数的に独立である．」により，ガンマ関数は汎用計測型計算機では生成できない．他方，ガンマ関数は，定義公式を利用すると，Turing 計算可能であることが容易に示される．これについては，筆者のホームページ所収の「ガンマ関数と計算機 — ヘルダーの論文をめぐって —」（[24]）もご覧いただきたい．

[4] Joseph Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Éditions Jacques Gabay. 1988.

[5] I. Grattan-Guiness & J. Ravetz. *Joseph Fourier 1768 – 1830. A survey of his life and work*. MIT Press. 1972.

[6] ゲーデル. 不完全性定理. 岩波書店. 2006. （訳・解説：林晋・八杉満利子）.

[7] John Herivel. *Joseph Fourier — The man and the physicist*. Clarendon Press. 1975.

[8] Jean-Pierre Kahane and Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset. *Fourier series and wavelets*. Gordon and Breach Publishers. 1995.

[9] 井上謙蔵. 微分解析機. 理大科学フォーラム. **2004(6)** (2004), 6 – 10.

[10] 村上隆. 芸術起業論. 幻冬舎. 2006.

[11] Marian B. Pour-El. Abstract computability and its relation to the General Purpose Analog Computer (Some connections between logic, differential equations and analog computers), Trans. Amer. Math. Soc., **199** (1974), pp. 1-28.

[12] Elena Prestini. *Applied harmonic analysis*. Birkhäuser. 2004.

[13] Claude E. Shannon. Mathematical theory of differential analyzer, J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. , **20** (1941), pp. 337–354.

[14] Hiroshi Sugiyama. A sketch of the life of Dr. Shimizu. Mathematica Japonicae, **44** (1994), 2.

[15] 高瀬正仁. フーリエの熱の解析的理論に見る微積分の基本定理. 数理解析研究所講究録 **1546** (2007), pp. 41–54.

[16] James Thomson. On an Integrating Machine having a New Kinematic Principle. Proc. Roy. Soc. London **24** (1876), pp. 262–265.

[17] William Thomson. On an instrument for calculating $\left(\int \varphi(x)\psi(x)dx\right)$, the integral of the product of two given functions. Proc. Roy. Soc. London **24** (1876), 266–268.

[18] William Thomson. Mechanical Integration of the Linear Differential Equations of the Second Order with Variable Coefficients. Proc. Royal Soc. London **24** (1876). pp. 269–271.

[19] William Thomson. Mechanical Integration of the general Linear Differential Equation of any Order with Variable Coefficients. Proc. Royal Soc. London **24** (1876). pp. 271–275.

[20] 吉川敦. フーリエ解析入門. 森北書店. 2000.

[21] http://www.maths.lth.se/matematiklu/personal/jaak/engJP.html

[22] http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/Planimeter/PLANIMETER.HTM

[23] http://www.meccano.us/

[24] http://www7b.biglobe.ne/~yoshikawa/